

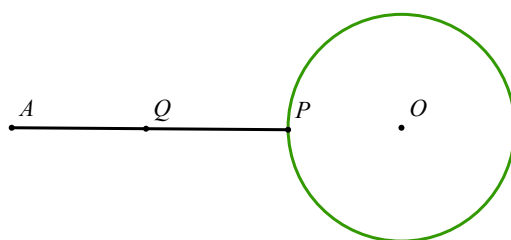
第2讲 瓜豆原理与费马点问题

一、瓜豆原理

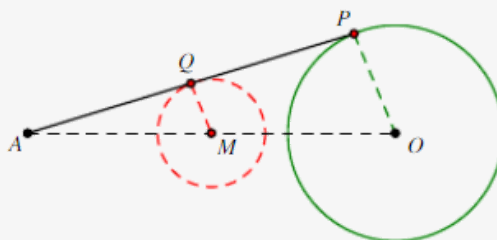
1. 轨迹为圆

思考一：

如图， P 为 $\odot O$ 上一动点， A 为顶点，连接 AP ， Q 为 AP 中点，则点 Q 的轨迹是？



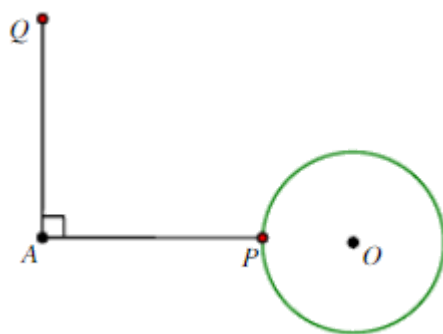
【备注】



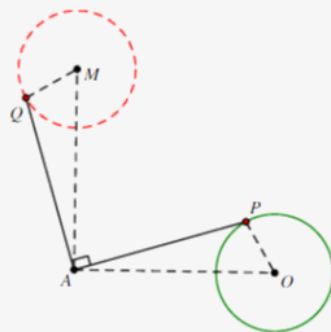
易证 $\triangle AQM \sim \triangle AOP$ ，相似比为 $1:2$ ， $QM = \frac{1}{2}OP$ ，因此点 Q 在以 M 为圆心， $\frac{1}{2}OP$ 为半径的圆上运动

思考二：

如图， P 是 $\odot O$ 上一动点， A 为定点，连接 AP ，作 $AQ \perp AP$ 且 $AQ = AP$ ，则点 Q 运动的轨迹是？



【备注】



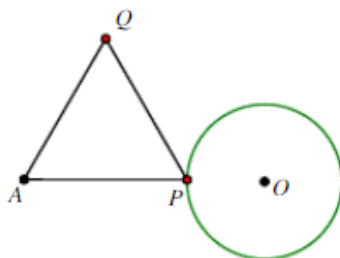
考虑 $AP \perp AQ$ ，可得 Q 点轨迹圆心 M 满足 $AM \perp AO$

考虑 $AP = AQ$ ，可得 Q 点轨迹圆心 M 满足 $AM = AO$ ，且可得半径 $MQ = PO$

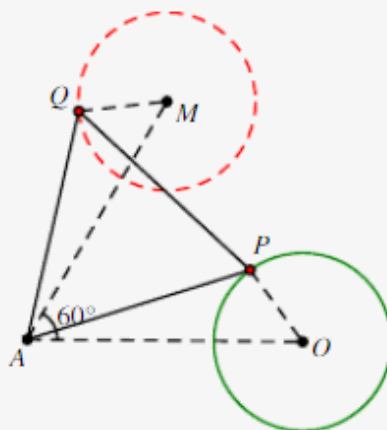
即可确定圆 M 位置，任意时刻均有 $\triangle APO \cong \triangle AQM$

思考三：

如图， P 是 $\odot O$ 上一动点， A 为定点，连接 AP ，以 AP 为一边作等边 $\triangle APQ$ ，则点 Q 的轨迹是？



【备注】



由 $\angle PAQ = 60^\circ$ ，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $\angle MAO = 60^\circ$

由 $AP = AQ$ ，可得 Q 点轨迹圆圆心 M 满足 $AM = AO$ ，且半径 $MQ = PO$ ，即 $\triangle APO \cong \triangle AQM$

！ 总结：

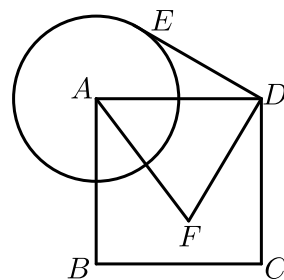
瓜豆原理两个必要条件：两个变量

①主动点、从动点到定点的 距离是定值

②主动点、从动点与定点连线的 夹角是定角

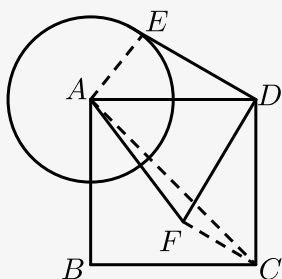
1. 2019年陕西西安未央区初三中考一模第14题3分 ★★

如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，以点 A 为圆心，1 为半径作圆， E 是 $\odot A$ 上的任意一点，将点 E 绕点 D 按逆时针方向旋转 90° 得到点 F ，则线段 AF 的长的最小值 _____ .



【答案】 $2\sqrt{2} - 1$

【解析】 如图，连接 FC ， AC ， AE .



$\because ED \perp DF$,

$\therefore \angle EDF = \angle EDA + \angle ADF = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore AD = CD$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF + \angle CDF = 90^\circ$,

$\therefore \angle EDA = \angle CDF$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中 ,

$$\because \begin{cases} AD = CD \\ \angle EDA = \angle FDC \\ ED = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$ (SAS) ,

$\therefore CP = AE = 1$,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2 ,

$\therefore AC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AF \geq AC - CF$,

$\therefore AF \geq 2\sqrt{2} - 1$,

$\therefore AF$ 的最小值是 $2\sqrt{2} - 1$,

故答案为 : $2\sqrt{2} - 1$.

【标注】 【能力】 分析和解决问题能力

【知识点】正方形的性质

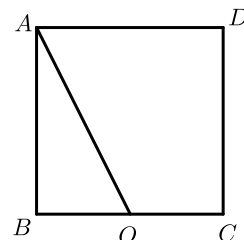
【知识点】旋转性质综合应用

【知识点】旋转的性质

2. 2020~2021学年天津和平区初三上学期期末第18题3分 ★★

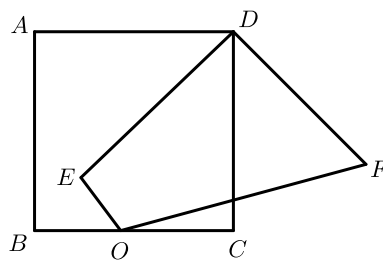
已知正方形 $ABCD$ 的边长为 6， O 是 BC 边的中点。

(1) 如图①，连接 AO ，则 AO 的长为 _____。



图①

(2) 如图②，点 E 是正方形内一动点， $OE = 2$ ，连接 DE ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90° 得 DF ，则线段 OF 长的最小值为 _____。



图②

【答案】(1) $3\sqrt{5}$

(2) $3\sqrt{10} - 2$

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，边长为 6，

$$\therefore AB = BC = AD = CD = 6, \angle ABC = 90^\circ,$$

$\because$ 点 O 是 BC 的中点，

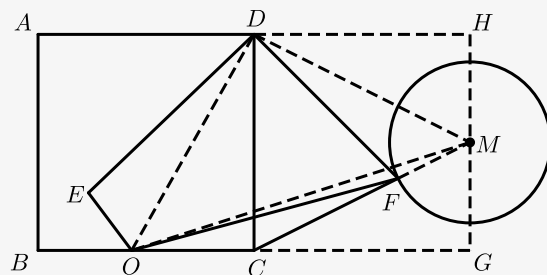
$$\therefore OB = OC = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中, } AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}.$$

故答案为： $3\sqrt{5}$ 。

(2) 以 CD 为边向右作正方形 $DCGH$ ，取 HG 的中点 M ，

连接 OD 、 MD 、 OM 、 FM ，



∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $DCGH$ 都是正方形 ,

∴ $DC = DH = BC = HG$, $\angle DCB = \angle CDH = \angle H = 90^\circ$,

∵ 点 M 是 HG 的中点 ,

∴ $HM = MG = \frac{1}{2}HG = 3$,

∴ $OC = MH$,

在 $\triangle DCO$ 和 $\triangle DHM$ 中 ,

$$\begin{cases} DC = DH \\ \angle DCO = \angle DHM \\ OC = MH \end{cases}$$

∴ $\triangle DCO \cong \triangle DHM$ (SAS) ,

∴ $OD = MD$, $\angle CDO = \angle HDM$,

∵ $\angle HDM + \angle CDM = 90^\circ$,

∴ $\angle CDO + \angle CDM = 90^\circ$,

∴ $\angle ODM = 90^\circ$,

∵ 线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到线段 DF ,

∴ $DE = DF$, $\angle EDF = 90^\circ$,

∴ $\angle EDF = \angle ODM$,

∴ $\angle EDF - \angle ODF = \angle ODM - \angle ODF$,

∴ $\angle EDO = \angle FDM$,

在 $\triangle DMF$ 和 $\triangle DOE$ 中 ,

$$\begin{cases} DM = DE \\ \angle FDM = \angle EDO \\ DF = DE \end{cases}$$

∴ $\triangle DMF \cong \triangle DOE$ (SAS) ,

∴ $MF = OE = 2$,

∴ 点 F 在以点 M 为圆心 , 2 为半径的圆上移动 ,

∴ $OF \leq OM - MF$,

∴ 当且仅当 O 、 F 、 M 三点共线时线段 OF 取得最小值 ,

∵ $OG = OC + CG = 9$,

∴ 在 $\text{Rt}\triangle OGM$ 中 , $OM = \sqrt{OG^2 + MG^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$,

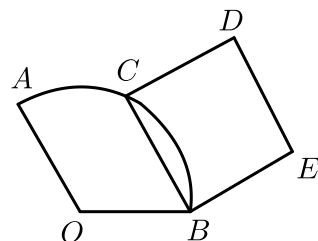
∴ OF 的最小值为 $3\sqrt{10} - 2$.

故答案为 : $3\sqrt{10} - 2$.

栗子二

3. 2021年广东深圳福田区深圳市高级中学中考模拟（四）第14题3分 ★★

如图，已知扇形 AOB 中， $OA = 3$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ， C 是 $\widehat{AB}$ 的动点，以 BC 为边作正方形 $BCDE$ ，当点 C 从点 A 移动到点 B 时，点 D 经过的路径长是 _____。



【答案】 $2\sqrt{2}\pi$

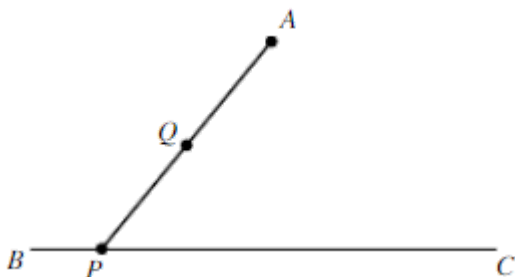
【解析】 $\because BD = \sqrt{2}BC$ 恒成立，且 B 为一定点，
由不动点原理，
 C 为主动点， D 为从动点，
 $\therefore$ 动点 D 由动点 C 而来，那么动点 D 的轨迹也必然由动点 C 的轨迹而来，
 $\therefore C$ 的运动轨迹是一段圆弧，
 $\therefore D$ 的运动轨迹也是一段圆弧，
 $\because DB = \sqrt{2}BC$ ，
 $\therefore D$ 的运动轨迹 $= \sqrt{2} \cdot C$ 的运动轨迹，
 $= \sqrt{2} \cdot \frac{120\pi \cdot 3}{180}$ ，
 $= 2\sqrt{2}\pi$ 。

【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为弧

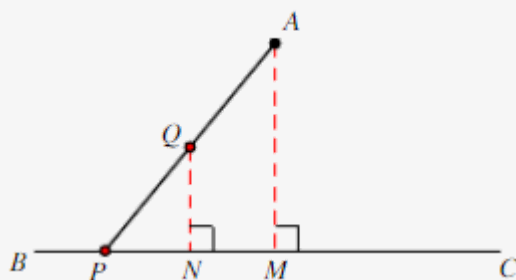
2. 轨迹为直线

思考一：

如图， P 是直线 BC 上一动点，连接 AP ，取 AP 中点 Q ，在点 P 运动的过程中， Q 点轨迹是？

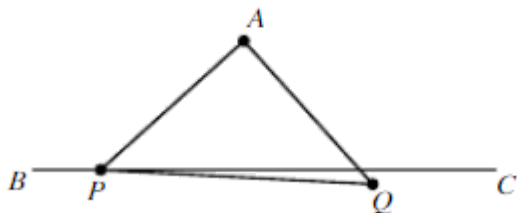


【备注】 分别过 A 、 Q 向 BC 作垂线，垂足分别为 M 、 N ，在运动过程中，因为 $AP = 2AQ$ ，所以 QN 始终为 AM 的一半，即 Q 点到 BC 的距离是定值，故 Q 点轨迹是一条直线。

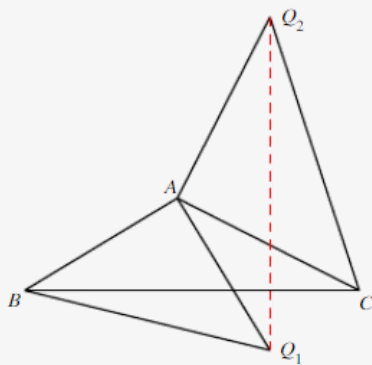


思考二：

如图， $\triangle APQ$ 是等腰直角三角形， $\angle PAQ = 90^\circ$ 且 $AP = AQ$ ，在点 P 运动的过程中， Q 点的轨迹是？



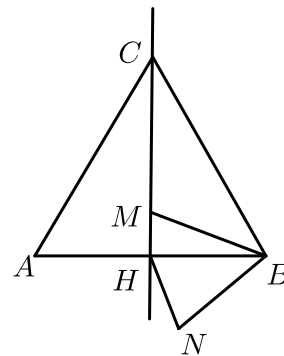
【备注】 易得 AP 与 AQ 夹角固定且比值为定值，因此 P 、 Q 轨迹是同一种图形。确定轨迹为直线后，可以任取两个时刻得 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹。



栗子三

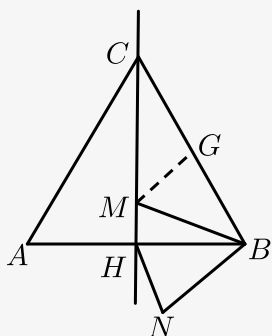
4. 2019~2020 学年湖北武汉武昌区武昌区粮道街中学初三上学期中第16题3分 ★★★★★

如图，在边长为 $2a$ 的等边 $\triangle ABC$ 中， M 是高 CH 所在直线上的一个动点，连接 BM ，将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN ，连接 HN ，则在点 M 运动的过程中，线段 HN 长度的最小值为 _____。



【答案】 $\frac{a}{2}$

【解析】如图，取 BC 的中点 G ，连接 MG ，



$\because$ 旋转角是 60° ，

$\therefore \angle MBH + \angle HBN = 60^\circ$ ，

又 $\because \angle MBH + \angle MBC = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle HBN = \angle GBM$ ，

$\because CH$ 是等边 $\triangle ABC$ 的对称轴，

$\therefore HB = \frac{1}{2}AB$ ，

$\therefore HB = BG$ ，

又 $\because BM$ 旋转到 BN ，

$\therefore BM = BN$ ，

在 $\triangle MBG$ 和 $\triangle NBH$ 中，

$$\begin{cases} BG = BH \\ \angle MBG = \angle NBH \\ MB = NB \end{cases}$$

$\therefore \triangle MBG \cong \triangle NBH$ (SAS)，

$\therefore MG = NH$ ，

$\therefore$ 根据垂线段最短， $MG \perp CH$ 时， MG 最短，即 HN 最短，

此时 $\because \angle BCH = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$ ， $CG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2a = a$ ，

$\therefore MG = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2} \times a = \frac{a}{2}$ ，

$\therefore HN = \frac{a}{2}$ 。

【标注】【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

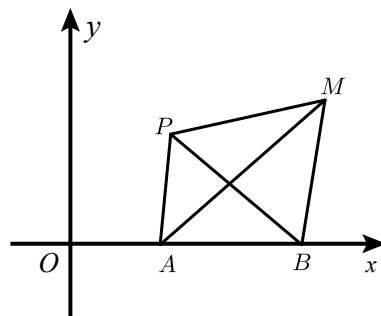
【能力】运算能力

【知识点】垂线段最短

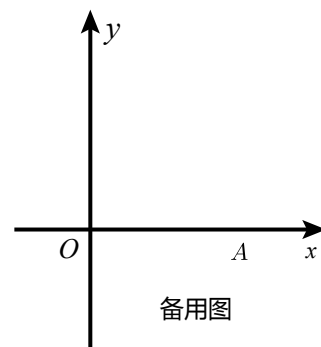
【知识点】SAS

5. 2021年天津河西区初三中考一模第24题10分 ★★★

如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(2,0)$ ，点 P 为线段 AB 外一动点，且 $PA = OA$ ，点 B 为 x 轴上一点。现在以 B 为中心，将 PB 顺时针旋转 60° 至 BM ，连接 PM 。



- (1) 求证： $\triangle PBM$ 为等边三角形。
- (2) 当 $PA \perp x$ 轴， $B(2 + 2\sqrt{3}, 0)$ 时，求 AM 的长。
- (3) 当点 B 的坐标为 $(5, 0)$ 时，求线段 AM 的最大值（直接写出结果即可）

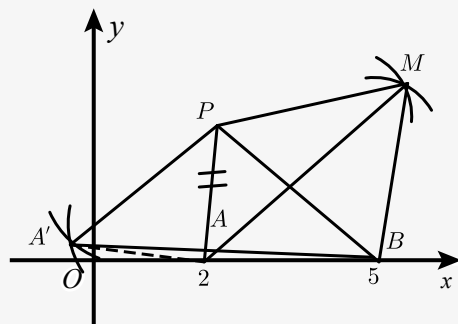


【答案】(1) 证明见解析。

(2) $AM = 2\sqrt{7}$ 。

(3) 5。

【解析】(1) $\because PB$ 顺时针旋转至 60° 到 BM ，



$\therefore \angle PBM = 60^\circ$ ， $BP = BM$ ，

在 $\triangle PBM$ 中, $\angle PBM = 60^\circ$, $BP = BM$,

$\therefore \triangle PBM$ 为等边三角形.

(2) 当 $PA \perp x$ 轴, $B(2+2\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore AB = 2\sqrt{3}$, $PA = OA = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $PA = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle PBA = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \angle PBA = 30^\circ$,

$$\text{又} \because BP^2 = PA^2 + AB^2$$

$$= 4 + 4 \times 3$$

$$= 4^2,$$

$$\therefore BP = MB = 4,$$

由题知 $\angle PBM = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ABM = \angle ABP + \angle PBM$$

$$= 60^\circ + 30^\circ$$

$$= 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABM$ 为直角三角形,

$$\therefore AM^2 = AB^2 + BM^2$$

$$= (2\sqrt{3})^2 + 4^2$$

$$= 28,$$

$$\therefore AM = 2\sqrt{7}.$$

(3) 将 $\triangle MPA$ 绕点 P 顺时针旋转 60° , 得到 $\triangle BPA'$, 连接 AA' ,

根据旋转不变性: $PA = PA'$, $\angle MPB = \angle APA' = 60^\circ$, $AM = BA'$,

$\therefore \triangle PAA'$ 是等边三角形,

$$\therefore AA' = PA = 2,$$

$$\therefore BA' \leq AA' + AB,$$

$\therefore$ 当 A' 、 A 、 B 共线时, BA' 的值最大, 此时 A' 在 BA 的延长线上,

$\therefore$ 此时 A' 在 O 点, $AM = A'B = OB = 5$,

$\therefore$ 线段 AM 的最大值为 5.

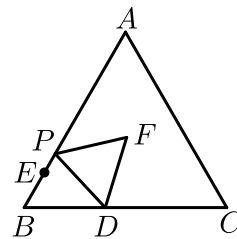
【标注】【知识点】利用三边关系求最值

栗子四

6. 2019~2020学年北京通州区初二上学期期中第16题3分 ★★★★★

如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, $BD = 4$, $BE = 2$, 点 P 从点 E 出发沿 EA 方向运动, 连接 PD , 以 PD 为边, 在 PD 的右侧按如图所示的方式作等边 $\triangle DPF$, 当点 P 从点 E 运动到点 A 时, 点 F 运

动的路径长是 _____ .



【答案】 8

【解析】 如图， $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

过 D 点作 $DE' \perp AB$ ，则 $BE' = \frac{1}{2}BD = 2$ ，

$\therefore$ 点 E' 与点 E 重合，

$$\therefore \angle BDE = 30^\circ, DE = \sqrt{3}BE = 2\sqrt{3},$$

$\therefore \triangle DPF$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle PDF = 60^\circ, DP = DF,$$

$$\therefore \angle EDP + \angle HDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HDF + \angle DFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDP = \angle DFH,$$

在 $\triangle DPE$ 和 $\triangle FDH$ 中，

$$\begin{cases} \angle PED = \angle DHF \\ \angle EDP = \angle DFH \\ DP = FD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DPE \cong \triangle FDH,$$

$$\therefore FH = DE = 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 P 从点 E 运动到点 A 时，点 F 运动的路径为一条线段，此线段到 BC 的距离为 $2\sqrt{3}$ ，

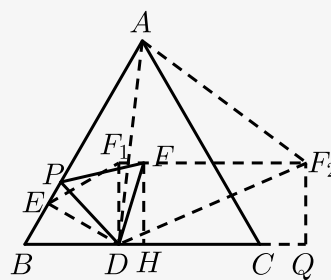
当点 P 在 E 点时，作等边三角形 DEF_1 ， $\angle BDF_1 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ ，则 $DF_1 \perp BC$ ，

当点 P 在 A 点时，作等边三角形 DAF_2 ，作 $F_2Q \perp BC$ 于 Q ，则 $\triangle DF_2Q \cong \triangle ADE$ ，所以

$$DQ = AE = 10 - 2 = 8,$$

$$\therefore F_1F_2 = DQ = 8,$$

$\therefore$ 当点 P 从点 E 运动到点 A 时，点 F 运动的路径长为 8.



【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为直线

二、费马点问题

1. 费马点定义

费马点：位于三角形 内 且到三角形三个顶点 距离之和最短 的点。

若给定一个三角形 $\triangle ABC$ 的话，从这个三角形的费马点 P 到三角形的三个顶点 A 、 B 、 C 的距离之和比从其它点算起的都要小；这个特殊点对于每个给定的三角形都只有 一 个。

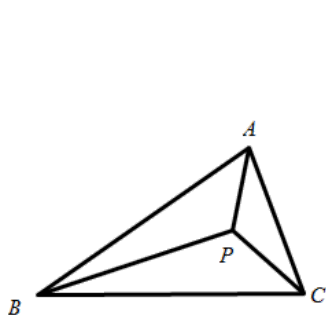
2. 费马点的结论及证明

结论：

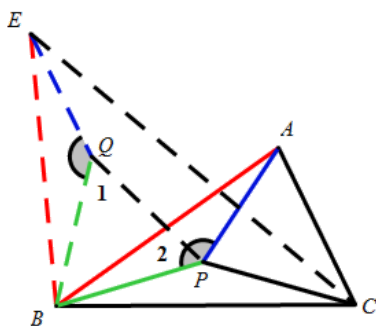
1、费马点到三角形三个顶点的距离之和 最短

2、费马点连接三顶点所成的夹角皆为 120°

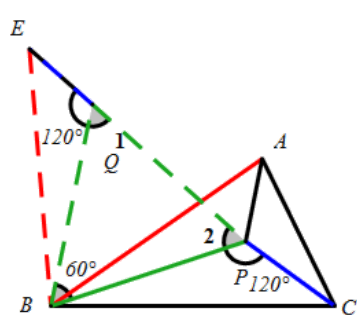
证明：



图一



图二



图三

如图一，在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P ，连接 PA 、 PB 、 PC

如图二，将 $\triangle APB$ 绕点 B 旋转 60° 得到 $\triangle EQB$ ，则 $\triangle EQB \cong \triangle APB$

连接 PA ， $\because \angle PBQ = 60^\circ$ ， $PB = PQ$ ，

$\therefore \triangle QPB$ 是 等边 三角形，则 $PB = \underline{QP = BQ}$ ， $\angle 1 = \angle 2 = \underline{60^\circ}$ 。

$\therefore PA + PB + PC = \underline{EQ + QP + PC} \geq \underline{EC}$ 。

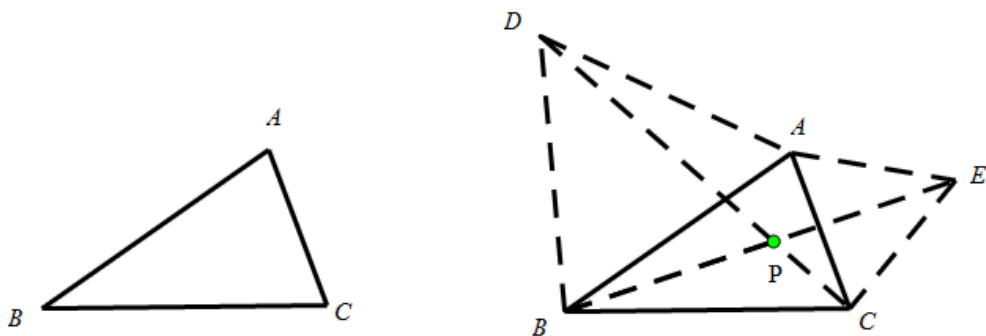
如图三，当且仅当 E 、 Q 、 P 、 C 四点 共线 时取等号，此时 $\angle EQB = \underline{\angle CPB} = \underline{120^\circ}$

$\therefore \underline{\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ}$ ， $PA + PB + PC$ 取到最小值 EC 。

$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点，且点 P 到三角形三个顶点的距离之和最小。

【备注】 此外费马点还可以通过旋转 $\triangle PAC$ 、 $\triangle BPC$ 60° 进行证明

3. 费马点的构造



作法：

以 $\triangle ABC$ 的任意两边为边分别向外做等边三角形，即以 AB 为边向外作等边三角形 ABD ，以 AC 为边作等边三角形 ACE ，连接 DC 、 BE 交于 P ，则 P 即为所求的费马点。

栗子五

7. 2019~2020学年浙江台州椒江区初三上学期期末 ★★★

模型结论：如图1，正 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，点 P 是劣弧 AB 上一点，可推出结论 $PA + PB = PC$ 。

应用迁移：如图2，在 $\text{Rt}\triangle EDG$ 中， $\angle EDG = 90^\circ$ ， $DE = 3$ ， $DG = 2\sqrt{3}$ ， F 是 $\triangle DEG$ 内一点，则点 F 到 $\triangle DEG$ 三个顶点的距离和的最小值为()

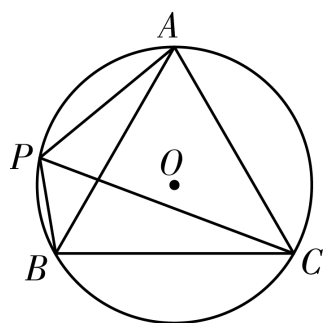


图1

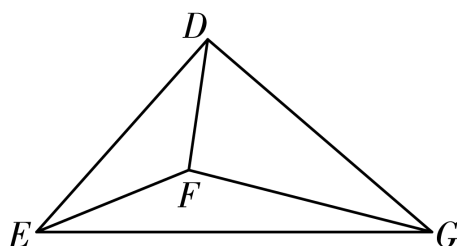


图2

A. $\sqrt{17}$

B. 5

C. $3\sqrt{3}$

D. $\sqrt{39}$

【答案】D

【解析】解：模型结论： $\therefore$ 将 $\triangle PBC$ 绕 C 点顺时针旋转 60° ，
 $\therefore \angle PCD = 60^\circ$ ， $PC = CD$ ， $AD = PB$ ， $\angle CAD = \angle CBP$ ，
 $\therefore \angle PBC + \angle PAC = 180^\circ$ ， $\angle DAC + \angle PAC = 180^\circ$ ，
 $\therefore P, A, D$ 在一条直线上，
 $\therefore \triangle PCD$ 是等边三角形，
 $\therefore PC = PD = DC$ ，
 $\therefore PB + PA = PA + AD = PD = PC$ 。

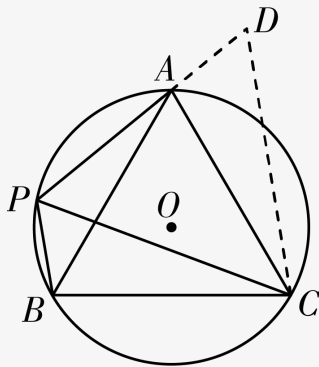


图1

应用迁移：如图2：以 DG 为边作等边 $\triangle MGD$ ，以 DF 为边作等边 $\triangle DFP$ 。连接 EM 、 PM ，作 $MN \perp ED$ ，交 ED 的延长线于 N 。

$\because \triangle MGD$ 和 $\triangle DFP$ 是等边三角形，

$\therefore PF = DF = PD$ ， $\angle FDP = \angle GDM = 60^\circ$ ， $DG = MD$ ，

$\therefore \angle FDG = \angle MDP$ ，

$\therefore \triangle DFG \cong \triangle DPM$ (SAS)，

$\therefore FG = PM$ ，

$\therefore EF + DF + FG = EF + PF + PM$ ，

$\therefore$ 当 E 、 F 、 P 、 M 四点共线时， $EF + PF + PM$ 值最小，且 $EF + PF + PM = EM$ ，

$\because \angle EDG = 90^\circ$ ， $DE = 3$ ， $DG = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore \angle EDM = 150^\circ$ ，

$\therefore \angle NDM = 30^\circ$ ，

$\therefore MD = DG = 2\sqrt{3}$ 。

$\therefore MN = \frac{1}{2}DM = \sqrt{3}$ ， $DN = 3$ ，

$\therefore NE = DE + DN = 3 + 3 = 6$ ，

$\therefore EM = \sqrt{EN^2 + MN^2} = \sqrt{6^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{39}$ ，

$\therefore$ 点 F 到 $\triangle DEG$ 三个顶点的距离和的最小值为 $\sqrt{39}$ ，

故选：D。

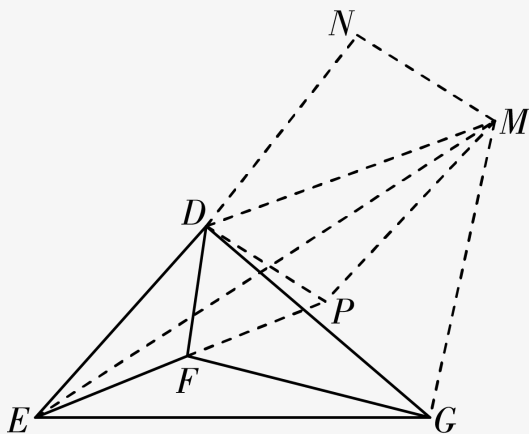
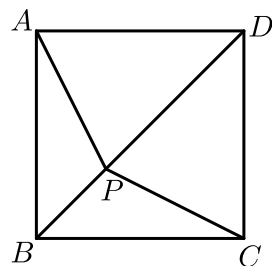


图2

【标注】【知识点】费马点

8. ★★★★★

如图， P 为正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一动点，若 $AB = 2$ ，则 $AP + BP + CP$ 的最小值为_____。



【答案】 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

【解析】 如图将 $\triangle ABP$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AEF$ ，当 E 、 F 、 P 、 C 共线时，

$PA + PB + PC$ 最小 .

理由： $\because AP = AF$ ， $\angle PAF = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle PAF$ 是等边三角形，

$\therefore PA = PF = AF$ ， $EF = PB$ ，

$\therefore PA + PB + PC = EF + PF + PC$ ，

$\therefore$ 当 E 、 F 、 P 、 C 共线时， $PA + PB + PC$ 最小，

作 $EM \perp DA$ 交 DA 的延长线于 M ，

ME 的延长线交 CB 的延长线于 N ，

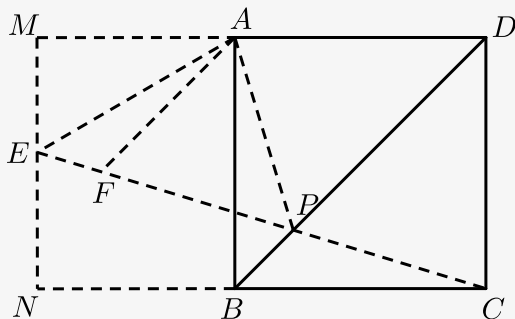
则四边形 $ABNM$ 是矩形，在 $\text{Rt}\triangle AME$ 中，

$\because \angle M = 90^\circ$ ， $\angle MAE = 30^\circ$ ， $AE = 2$ ，

$\therefore ME = 1$ ， $AM = BN = \sqrt{3}$ ， $MN = AB = 2$ ， $EN = 1$ ，

$$\begin{aligned} \therefore EC &= \sqrt{EN^2 + NC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} . \end{aligned}$$

$\therefore PA + PB + PC$ 的最小值为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.



【标注】 【知识点】 利用三边关系解决的最短问题